Pratique Supplémentaire 4 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.9, 2.1, 2.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Trouver les matrices associées à chacune des transformations linéaires suivantes

a) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, \mathbf{T}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\mathbf{T}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-5\\3\\6\end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \mathbb{T}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{T}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathbf{T}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{R}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ est la rotation d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

Sol.:

Exercice 2

Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes :

a) $f(x,y)=(2x-4y\,,\,6x+y)$,

b) rotation ρ d'angle θ dans le sens positif,

c) symétrie σ par rapport à la droite $y=x$.

Sol.:

Exercice 3

Calculer la matrice associée à chacune des applications linéaires suivantes et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives :

a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ donnée par $T(x,y)=(2y\ ,\ 3x)$

b) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ donnée par $T(x,y)=(5x-y\ ,\ 0)$

c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ donnée par $T(x,y,z)=(x+y\ ,\ x-z)$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $T(x,y) = (y\ ,\ x\ ,\ x-y)$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $T(x,y) = (x-y\ ,\ y-x\ ,\ 2x-2y)$

f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x,y,z) = (x+y+z\ ,\ x-y-z)$

Sol.:

Exercice 4

a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x,y,z) = (x-3y+4z\ ,\ x-5z\ ,\ 2y+6z)$$

b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.

c) Déterminer ensuite tous les vecteurs (x,y,z) tels que $T(x,y,z) = (0,0,0)$.

Sol.:

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si la matrice échelonnée-réduite associée à un système d'équations linéaires homogènes à m équations et n inconnues possède r pivots, alors le système a $n-r$ variables libres.	☐	☐
b) Si un système d'équations linéaires homogènes possède plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.	☐	☐
c) Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, alors $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.	☐	☐
d) Si le vecteur $\overrightarrow{v}_4$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_3$, alors le vecteur $\overrightarrow{v}_1$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$ et $\overrightarrow{v}_4$.	☐	☐

Sol.:

a) Vrai. Par définition d'une variable libre, il s'agit d'une variable qui n'a pas de position pivot. Comme ici nous avons n variables et r pivots, il y a r variables liées et donc $n-r$ variables libres.

b) Vrai. Nommons n le nombre d'inconnues et m le nombre d'équations de ce système. La matrice échelonnée-réduite associée à ce système possède r pivots avec $r \leqslant m$ et on a donc $n-r$ variables libres. Puisque $n > m$ et $r \leqslant m$ on a que $n-r > 0$ et donc le système possède au moins une variable libre. Comme le système est homogène il possède soit une seule solution (la solution triviale) soit une infinité (correspondant aux valeurs données aux éventuelles variables libres).

c) Faux. Prenons par exemple $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont non nuls mais $\overrightarrow{w}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

d) Faux. Prenons par exemple $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Dans ce cas on a bien que $\overrightarrow{v_4}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ (et banalement $\overrightarrow{v_3}$), tandis que $\overrightarrow{v_1}$ n'est pas combinaison linéaire des 3 autres vecteurs.

Exercice 6

Laquelle des colonnes de la matrice suivante n'est pas une colonne-pivot ?

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

- ☐ la première,
- ☐ la deuxième,
- ☐ la troisième,
- ☐ la quatrième.

Sol.: Dans cet exercice à choix multiple il s'agit encore une fois d'effectuer des opérations sur les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 6\end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L2}\leftrightarrow\text{L1}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 6\end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{\text{L3}-\text{L1}\\ \text{L4}-\text{L1}}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 3\end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{\text{L3}-2\text{L2}\\ \text{L4}-2\text{L2}}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

On voit donc que c'est la troisième colonne qui ne contient pas de pivot. Remarquons qu'il y a des choix plus économiques pour échelonner et réduire cette matrice, si on avait voulu résoudre le système associé (ce qui n'est pas le cas).

Exercice 7

Soit $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

- ☐ Le span ne contient aucun vecteur de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le span contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ est dans le span.
- ☐ Le span contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Sol.: Comme la troisième composante des quatre vecteurs est nulle, tous les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} * \\ * \\ a \\ * \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$, ne seront pas dans le span. Donc le span ne peut pas contenir le vecteur $\overrightarrow{b}$ ainsi que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Comme $\overrightarrow{v_1}$ (ou $\overrightarrow{v_2}$, ...) est dans le span, le span contient un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Vu qu'il contient au moins un vecteurs de $\mathbb{R}^4$, il contient toutes les combinaisons linéaires de celui-ci, et donc une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Remarque : le span de n'importe quelle liste de vecteurs non-nuls contient toujours une infinité de vecteurs.

Exercice 8

L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z \ , \ 2x - 5y + 7z \ , \ 3x - y - 2z \ , \ y + 3z)$$

- ☐ est injective mais pas surjective
- ☐ est surjective mais pas injective
- ☐ est bijective
- ☐ n'est ni surjective ni injective

Sol.: est injective mais pas surjective

Exercice 9

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer AC, BC et CB.

Sol.:

$$AC = \begin{pmatrix} -21 & 35 \\ 21 & 4 \\ 10 & -21 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} -8 & 35 \\ 23 & -20 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad CB = \begin{pmatrix} -12 & 25 & 11 \\ 31 & -15 & -10 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

On se donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si elles sont définies, calculer les matrices :

$$AB, CA, CD, DC, A^T A, AA^T.$$

Si elles ne sont pas définies, expliquer pourquoi.

Sol.:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 28 \\ -21 & -4 \\ -9 & -4 \end{pmatrix},$$

CA n'est pas définie car on ne peut pas multiplier une matrice 2×1 par une matrice 3×2,

$$CD = \begin{pmatrix} 56 & 14 \\ -24 & -6 \end{pmatrix}, \qquad DC = [50],$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 51 & -7 \\ -7 & 29 \end{pmatrix}, \qquad AA^T = \begin{pmatrix} 49 & -7 & -7 \\ -7 & 26 & 11 \\ -7 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

On considère les matrices élémentaires de taille 4×4.

a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a), b) et c).

Sol.:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Pour inverser la transformation associée à A, on considère la même transformation qui permute les lignes 2 et 4, ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à B, on considère la transformation qui soustrait cinq fois la ligne 1 à la ligne 3, ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à C, on considère la transformation qui divise la ligne 3 par 17, ainsi $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

Ceci est un autre exercice de base concernant les produits matriciels, pour nous assurer que la différence entre $\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}^T$ est bien claire.

On peut considérer tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme une matrice de dimension $n \times 1$. Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle $\overrightarrow{u}^T\ \overrightarrow{v}$ produit scalaire (ou produit intérieur) des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a) Ecrire $\overrightarrow{u}^T$ et $\overrightarrow{v}^T$.
b) Quelle est la taille des deux matrices produits $\overrightarrow{u}^T\ \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}^T\ \overrightarrow{u}$?
c) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Le produit $\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}^T$ est appelé produit extérieur.

d) Quelle est la taille des deux matrices produits $\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}^T$ et $\overrightarrow{v}\ \overrightarrow{u}^T$?
e) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Sol.:

a) $\overrightarrow{u}^T = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
b) La matrice $\overrightarrow{u}^T$ est une matrice 1×3 et la matrice $\overrightarrow{v}$ est une matrice 3×1. La taille du produit $\overrightarrow{u}^T\ \overrightarrow{v}$ est donc 1×1. Même chose pour la taille du produit $\overrightarrow{v}^T\ \overrightarrow{u}$.
c) Ces deux produits sont transposés l'un de l'autre, comme ils sont de taille 1×1, ils sont égaux.
d) La matrice $\overrightarrow{u}$ est une matrice 3×1 et la matrice $\overrightarrow{v}^T$ est une matrice 1×3. La dimension du produit $\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}^T$ est donc 3×3. Même chose pour la dimension du produit $\overrightarrow{v}\ \overrightarrow{u}^T$.
e) Non. Les produits sont transposés l'un de l'autre, mais ici on a des matrices 3×3. En général une matrice n'est pas égale à sa transposée. Pour le démontrer, le plus simple est de donner un contre-exemple concret. On peut choisir par exemple $a = 1$, $b = c = 0$. Les deux matrices 3×3 sont alors distinctes.

Exercice 13

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Sol.: La matrice A est une matrice *carrée* de dimension 4×4. Il suffit de la mettre sous forme échelonnée pour voir qu'elle a 4 pivots :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Un théorème du cours montre que A est inversible.

La matrice B est carrée et de dimension 4×4. De plus B est déjà sous forme échelonnée, on voit donc directement qu'elle a 4 pivots et donc qu'elle est inversible.

Si on transpose la matrice C on trouve :

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

La transposée de C est donc une matrice carrée de dimension 4×4 qui a 4 pivots. Donc C^T est inversible. Donc C est inversible.

Par contre la matrice D est de dimension 4×3 et ne peut pas être inversible.